**Проблемы гуманитаризации математического образования**

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов

Одним из направлений реформирования системы образования, широко обсуждаемых в последнее время, является так называемая гуманитаризация математического образования. Существуют различные трактовки этого понятия.

Некоторые понимают гуманитаризацию образования как увеличение доли гуманитарных предметов и сокращение числа часов, отводимых на изучение предметов естественно-научного цикла.

По-видимому, именно так понимают гуманитаризацию авторы новых учебных планов для педагогических университетов. В этих планах предполагается почти двукратное сокращение числа часов, отводимых на изучение математики. Конечно, это может привести к резкому снижению уровня подготовки учителей математики.

Другие под гуманитаризацией математического образования понимают перенос акцента с информационной на развивающую функцию обучения математике, принимая за основной тезис: не ученик для математики, а математика для ученика.

При этом подразумевается как самоочевидное, что отечественное математическое образование не уделяло должного внимания развивающей функции обучения, что ученик был для математики.

И то и другое неверно. Целью образования на протяжении многих десятилетий было всестороннее развитие личности, воспитание активного строителя коммунизма.

Вместо всестороннего развития личности сторонники такой гуманитаризации противопоставляют информационную и развивающую функции обучения. Ученик противопоставляется математике.

Третьи под гуманитаризацией понимают приоритет здравого смысла при обучении математике. Так, например, для обоснования ненужности развития логического мышления при обучении математике в одной из докторских диссертаций, посвященных проблемам гуманитаризации, приводятся следующее высказывание М. М. Постникова: "Дедуктивное мышление составляет лишь небольшую долю среди прочих видов мышления. И требуется оно лишь ученым-теоретикам. Даже в прикладной математике дедуктивное мышление, как правило, мешает. Главную же роль в жизни играет мышление рациональное или, иначе говоря, здравый смысл".

Конечно, из приведенного высказывания вовсе не следует вывод о ненужности развития логического мышления школьников. Так в младших классах школьников учат правописанию. Медленно и по определенным правилам дети учатся писать буквы. В дальнейшем они пишут гораздо быстрее и не всегда придерживаются правил написания букв. Однако из этого не следует, что вообще не нужно учить правописанию. Оно составляет основу, фундамент, на котором строится все дальнейшее обучение. Так же обстоит дело и с логическим мышлением. Оно не исчерпывает всего мышления, но составляет его основу.

Общим в перечисленных трактовках понятия гуманитаризации является сокращение числа часов, отводимых на изучение математики, снижение уровня математического образования.

Вывод, который из этого следует, состоит в том, что педагоги не могут найти пути совершенствования математического образования без снижения его уровня.

Отметим, что совершенствование системы математического образования не вызывает сомнения. Вопрос о том, каким быть математическому образованию в XXI веке, является чрезвычайно важным. Что может дать гуманитаризация математическому образованию? Ответ на этот вопрос окажет влияние на все будущее России.

Недостатком педагогических теорий по реформированию математического образования является их неконкретность и расплывчатость. Математикам самим следует заботиться о совершенствовании математического образования, привлекая для этого соответствующие педагогические теории.

Так, например, на вопрос о том, каким быть курсу математики в педагогических университетах, нельзя ответить без привлечения преподавателей математики педагогических университетов.

За последние годы проблемы математического образования в педагогических университетах существенно обострились.

Уровень математической подготовки абитуриентов понизился по объективным причинам. Если раньше в школе было 8 часов математики, то сейчас только 5.

Учебные программы по математике за последние 50 лет пересматривались только в сторону сокращения. Сейчас они уже не соответствуют современным требованиям.

Выпускники педагогического университета недостаточно хорошо знают вопросы элементарной математики, плохо представляют состояние современной математики, практически незнакомы с такими ее разделами, как функциональный анализ, дифференциальная геометрия, топология и др.

Хотелось бы, чтобы курс математики в педагогическом университете отвечал современным требованиям, чтобы выпускники имели высокий общий культурный уровень в области математики, хорошо знали вопросы элементарной и школьной математики, были знакомы с современными направлениями развития математики и ее приложениями.

Вопрос состоит в том, как этого добиться, каковы пути и резервы совершенствования преподавания математики в педагогическом университете.

Курс математики в педагогическом университете состоит из двух компонентов: элементарной математики и высшей математики. С одной стороны, он не может копировать курс высшей математики мехмата МГУ, с другой ─ он не должен сводиться к курсу школьной или элементарной математики.

В последние годы часы на элементарную математику в педагогическом университете существенно увеличились. Тем не менее, не все выпускники педагогических университетов хорошо решают школьные математические задачи.

Одним из предложений по устранению этого недостатка является дальнейшее увеличение числа часов, отводимых на решение школьных математических задач.

Мы не являемся сторонниками этого предложения по следующим причинам.

Причиной недостатков в решении школьных задач является низкий уровень математической культуры некоторых студентов. Нужно не увеличивать время на решение задач, а повышать общий математический уровень.

Натренированность в решении задач пропадает с течением времени. Пик ее имеет место при поступлении в университет. Затем она снижается, это не так страшно.

Здесь уместно такое сравнение: в институте физкультуры при подготовке тренера по футболу студента не заставляют только играть в футбол, поддерживая спортивную форму, имеющуюся при поступлении, ему читают лекции, проводят практические занятия по изучению теоретических основ футбола. Тренеру по футболу не обязательно иметь сильный удар по мячу или хороший дриблинг. Он должен знать футбол, понимать его и разбираться в нем.

Действительным недостатком обучения элементарной математике студентов педагогического университета является сведение элементарной математики к решению школьных задач, недостаточное знание студентами теоретических основ и имеющейся литературы по элементарной математике.

В курсе элементарной математики следует уделить больше внимания научно-популярной математике, которая может служить звеном между элементарной математикой и современными разделами высшей математики.

Выпускник педагогического университета, в отличие от выпускника МГУ, должен быть широко образован в области элементарной и научно-популярной математики, знать имеющуюся литературу по элементарной математике, книги и статьи в научно-популярных журналах, которые можно было бы использовать при работе в школе в качестве дополнительного учебного материала.

В этом истинный смысл гуманитаризации курса элементарной математики.

В качестве примера из элементарной математики приведем теорему о сумме углов многоугольника.

Подавляющее большинство студентов математического факультета МПГУ знает, что сумма углов выпуклого n-угольника равна 1800(n-2); умеют доказывать эту формулу, разбивая многоугольник на треугольники проведением диагоналей из одной вершины.

Меньшее число студентов знают, что эта формула суммы углов справедлива и для невыпуклых многоугольников. Ее доказательство для этого случая знают буквально единицы.

Многие студенты затруднялись ответить на вопросы о сумме углов звездчатого пятиугольника произвольной формы (необязательно правильного), о сумме углов звездчатых семиугольников и т.д.

Никто из опрошенных нами студентов не знал общую формулу суммы углов для звездчатого n-угольника

 = 1800(n-2m),

где m - степень многоугольника, т.е. число полных оборотов, совершаемых точкой при последовательном обходе сторон многоугольника.

Так, при обходе сторон звездчатого пятиугольника число оборотов равно двум и, следовательно, его сумма углов равна 1800. При обходе сторон звездчатых семиугольников число оборотов равно двум и трем и, следовательно, суммы углов этих семиугольников соответственно равны 1800 3 и 1800.

Понятие степени замкнутой ломаной, использованное в формуле суммы углов звездчатого многоугольника, обобщается до понятий степени замкнутой кривой и степени отображения, которые являются одними из основных в современной алгебраической топологии.

Из курсов высшей математики в педагогическом университете рассмотрим курс математического анализа, являющийся одним из наиболее трудных для освоения студентами, а успеваемость по нему - одна из самых низких.

Несмотря на довольно большое количество часов (6 в неделю в течение 4-х семестров (без теории функций действительного и комплексного переменных)), качество знаний студентов оставляет желать лучшего.

Попытки облегчить курс математического анализа привели к тому, что в последние годы из него ушли наиболее сложные вопросы, среди которых: фундаментальные последовательности и критерий Коши; ряды Фурье; предел и непрерывность отображений метрических пространств; дифференцирование отображений из Rn в Rm; поверхностные интегралы и многое другое.

Поскольку это не помогло, некоторые предлагают и дальше идти по пути сокращения изучаемого материала, фактически приближаясь к школьному курсу алгебры и начал анализа.

Таким образом, сложилась ситуация, при которой, с одной стороны, студенты испытывают трудности в освоении классического математического анализа, а с другой ─ мы не успеваем рассмотреть даже некоторые современные направления развития математического анализа, среди которых: функциональный анализ, вариационное исчисление и др.

То же самое относится к курсам алгебры и геометрии. Так, например, из курса геометрии полностью ушел раздел, касающийся дифференциальной геометрии и топологии, составляющий основу современного геометрического образования.

Мы не являемся сторонниками сокращения изучаемого материала по математическому анализу за счет удаления из него наиболее сложных и, как правило, наиболее важных тем. Наоборот, студенты педагогического университета должны, помимо хорошего знания классического дифференциального и интегрального исчисления, познакомиться с современными направлениями развития математического анализа и его приложениями. В отличие от курса для студентов МГУ здесь предполагается только знакомство, а не овладение современным математическим аппаратом.

Следует не ограничивать, не сужать кругозор студентов, а дать им возможность познакомиться со всем богатством, накопленным человечеством в области математики. В этом и состоит смысл гуманитаризации курса математики в педагогическом университете.

Укажем некоторые пути и резервы для решения этих проблем применительно к курсу математического анализа.

Можно отказаться от доказательства некоторых теорем, носящих вспомогательный характер или вводимых по аналогии с ранее доказанными теоремами, перенеся их в разряд самостоятельной работы.

Так, например, для самостоятельной работы можно перенести доказательство некоторых арифметических свойств показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Доказав теоремы о пределе суммы и произведения, аналогичную теорему о пределе частного можно отнести в самостоятельную работу.

Устранить дублирование между курсами алгебры, геометрии и математического анализа.

Так, например, в курсе математического анализа можно несколько сократить время на изучение площади и объема, учитывая, что они изучаются и в курсе геометрии.

Использовать такие определения и формулировки, которые позволяют избегать сложных доказательств и в то же время расширяют область приложений.

Так, например, обычно в курсе математического анализа длина кривой определяется как предел длин вписанных ломаных при стремлении диаметров разбиений к нулю. Доказательство того, что длина гладкой кривой выражается определенным интегралом, чрезвычайно громоздко и проводится обычно только для случая, когда кривая является графиком функции. В общем же случае параметрически заданной кривой формула принимается без доказательства.

Недостатком такого определения длины кривой является не только громоздкость доказательства общего случая, но и то, что этот способ не проходит при определении площади поверхности и уж тем более для более высоких размерностей.

Другой способ определения длины кривой основан на использовании бесконечно малых и определенного интеграла как суммы бесконечного числа бесконечно малых величин. Гладкая кривая, заданная параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t),   t  , представляется состоящей из бесконечно большого числа бесконечно малых участков, соответствующих бесконечно малым приращениям dt параметра t. Учитывая гладкость, каждый такой участок можно считать бесконечно малым отрезком, соединяющим точки с координатами (x,y), (x+dx,y+dy), длина dl которого вычисляется по обычной формуле

dl=



Длина l всей кривой представляет собой сумму длин ее бесконечно малых участков.

Следовательно,

l=



Такой способ позволяет избежать сложных доказательств, применим для введения понятия площади поверхности, для нахождения некоторых физических величин (масса, статические моменты, координаты центра тяжести и др.). Сама формула и ее обоснование легко запоминаются.

Еще одним понятием, требующим много времени и большого числа громоздких доказательств, является понятие определенного интеграла.

Обычно определенный интеграл в курсе математического анализа определяется как предел интегральных сумм. Доказываются свойства определенного интеграла, критерий интегрируемости, интегрируемость непрерывной функции и, наконец, формула Ньютона-Лейбница, сводящая определенный интеграл к неопределенному.

Нам представляется, что на первом курсе педагогического университета можно ограничиться определением определенного интеграла через неопределенный по формуле Ньютона-Лейбница. Этого вполне достаточно для приложений и избавляет от необходимости доказывать свойства определенного интеграла, поскольку они следуют из соответствующих свойств неопределенного интеграла. При этом интегральные суммы могут быть использованы как средство приближенного вычисления интеграла. Более сложные вопросы интегрального исчисления можно отнести в курс теории функций действительного переменного, где рассматривается интеграл Лебега.

Много времени в курсе математического анализа обычно уделяется отработке техники вычисления пределов, производных, интегралов, приближенных вычислений, построению графиков и т.д.

Результаты этой работы не всегда оправдывают ожидания. Особенно это касается вычисления пределов и интегралов. Уже на втором курсе, т.е. через год после изучения интегралов, студенты многое забывают, теряют навыки вычисления, затрудняются при нахождении интегралов от некоторых иррациональных функций. Это существенно сдерживает и ограничивает возможности решения прикладных задач на вычисление площадей поверхностей, объемов тел, решение дифференциальных уравнений и т.д.

Выходом из этого является не увеличение времени на отработку техники вычислений, а использование современных компьютерных средств, позволяющих находить пределы, суммы рядов, производные, интегралы, решать дифференциальные уравнения, получать изображения кривых и поверхностей и т.д.

К числу таких средств, например, относятся программы Derive, Mathcad, Mathematica и др. Их использование позволяет не только сократить время на отработку техники вычислений, но и существенно расширить и разнообразить круг решаемых задач, повысить интерес студентов к изучению математического анализа.

Следует шире практиковать обзорные лекции по современным направлениям развития математического анализа, в которых студенты могут познакомиться с современным состоянием науки, ее методами и приложениями.

Все сказанное выше дает возможность не только не исключать из курса математического анализа его важные разделы, но и включить в содержание обучения некоторые современные направления его развития и приложения, расширить кругозор и повысить математическую культуру студентов педагогических университетов.