**Курсовая работа**

на тему: **«Задача потребительского выбора**.

 **Функция потребительского предпочтения Стоуна»**

 **Пенза,2008**

 **Содержание**

Введение…………………………………………………………………………..3

1. Функция полезности. Бюджетное ограничение. Формулировка задачи потребительского выбора…………………………….……………………..…...4

 1.1 Решение задачи потребительского выбора и его свойства…………….7

 1.1.1. Пример решения задачи потребительского спроса……………...9

 1.2. Общая модель потребительского выбора……………………………..10

2. Функция потребительского предпочтения Стоуна……………………......12

Заключение……………………………………………………………………….14

Список использованной литературы…………………………………………...15

Приложение………………………………………………………………………16

 **Введение**

Современная математика характеризуется интенсивным проникновением в другие науки, во многом этот процесс происходит благодаря разделению математики на ряд самостоятельных областей. Математика стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчёта, но также методом точного исследования и средством предельно чёткой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с её развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы не возможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками, а поэтому вобрала в себя большое число математических методов.

Актуальность данной темы состоит в том, что в современной экономике используются оптимизационные методы, которые составляют основу математического программирования, сетевого планирования, теории массового обслуживания и других прикладных наук.

Изучение экономических приложений математических дисциплин, составляющих основу актуальной экономической математики, позволяет приобрести некоторые навыки решения экономических задач и расширить знания в этой области.

Целью данной работы является изучение некоторых оптимизационных методов, применяемых при решении экономической задач.

При написании курсовой работы были поставлены следующие задачи:

* Рассмотрение задачи потребительского выбора и составление математической модели;
* Изучение функции потребительского предпочтения Стоуна;
* Практическое решение задач.

**1. Функция полезности. Бюджетное ограничение. Формулировка задачи потребительского выбора.**

Будем считать, что потребитель располагает доходом Q, который он полностью тратит на приобретение благ (продуктов) Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определённое количество благ, и математическая модель такого его поведения называется ***моделью потребительского выбора*.**

В некоторых задачах выделяют один продукт, а вторым считают все остальные. Поэтому сначала рассмотрим модель с двумя видами продуктов. Потребительский набор – это вектор *(x1,x2),* координата *x1* которого равна количеству единиц первого продукта, а координата *x2* равна количеству единиц второго продукта.

Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения, суть которого состоит в следующем. Считается, что потребитель про каждые два набора может сказать, что-либо один из них более желателен, чем другой, либо потребитель не видит между ними разницы. Отношение предпочтения транзитивно, т.е. если набор *А=(а1,а2)* предпочтительнее набора *B=(b1,b2)*, а набор *B=(b1,b2)* предпочтительнее набора *С=(с1,с2),* то набор *А=(а1,а2)* предпочтительнее набора *С=(с1,с2).*

На множестве потребительских наборов *(x1,x2)* определена функция *u(x1,x2)* (называемая ***функцией полезности потребителя***), значение *u(x1,x2)* которой на потребительском наборе *(x1,x2)*равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Потребительскую оценку *u(x1,x2)* набора *(x1,x2)* принято называть ***уровнем*** (или***степенью***) удовлетворения потребительского индивидуума, если он приобретает или потребляет данный набор *(x1,x2).* Каждый потребитель имеет, вообще говоря, свою функцию полезности. Если набор А предпочтительнее набора В, то *u(А)>u(В).*

**Функция полезности удовлетворяет следующим свойствам**:

1. Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведёт к росту потребительской оценки, т.е. если *x>x*, то *u(x,x2)> u(x,x2)*;

 если *x>x*, то *u(x1, x)> u(x1, x).*

 Иначе говоря, *u(x1,x2)=u>0 , u(x1,x2)=u>0.*

 Первые частные производные *u* и *u* называются ***предельными*** ***полезностями***первого и второго продуктов соответственно.

1. Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объём его потребления растёт (***закон убывания предельной******полезности***). Из свойства второй производной следует, что *u(x1,x2)<0, u(x1,x2)<0.*
2. Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растёт количество другого продукта. В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Если блага могут замещать друг друга в потреблении, свойство не выполняется. *u(x1,x2)=u12>0, u(x1,x2)=u21>0.*

Линия, соединяющая потребительские наборы *(x1,x2)*, имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей называется ***линией безразличия***. Линия безразличия есть не что иное, как линия уровня функции полезности. Множество линий безразличия называется ***картой линий* *безразличия***. Линии безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей не пересекаются и не касаются. Чем выше и правее расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребностей она соответствует. Условия 1-3 означают, что линия безразличия убывает и является выпуклой вниз.

***Задача потребительского выбора*** заключается в выборе такого потребительского набора *(х, х),* который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

***Бюджетное ограничение***означает, что денежные расходы на продуктыне могут превышать денежного дохода, т.е.

 *p1x1+p2x2≤Q*, где

 p1 и p2 –рыночные цены,

 Q – доход потребителя, который он готов потратить на приобретение первого и второго продуктов.

Величины *p1, p2* и *Q* заданы.

Задача потребительского выбора имеет вид:

*u(x1,x2)→max*

 при ограничении *p1x1+p2x2≤Q*

 и при условии *x1≥0, x2≥0.*

Допустимое множество (т.е. множество наборов продуктов, доступных для потребителя) представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой. На этом множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Поиск этой точки можно интерпретировать графически как последовательный переход на линии всё более высокого уровня полезности до тех пор, пока эти линии ещё имеют общие точки с допустимым множеством (*Рис.1).*

бюджетная прямая

Линии безразличия

X1





X2

*Рис.1.*

* 1. **Решение задачи потребительского выбора и его свойства**.

Набор *(х, х)*, который является решением задачи потребительского выбора, принято называть ***оптимальным*** для потребителя.

Рассмотрим некоторые свойства задачи потребительского выбора. Во-первых, решение задачи *(х, х)* сохраняется при любом монотонном (т.е. сохраняющем порядок значении) преобразовании функции полезности *u(x1,x2)*. Поскольку значение *u(х, х),* было максимальным на всём допустимом множестве, оно остаётся таковым и после монотонного преобразования функции полезности (допустимое множество, определяемое бюджетным ограничением, остаётся неизменным). Таким монотонным преобразованием может быть умножение функции полезности на некоторое положительное число, возведение её в положительную степень, логарифмирование.

Во-вторых, решение задачи потребительского выбора не изменится, если все цены и доход увеличиваются (уменьшаются) в одно и то же число раз λ . (λ>0)

Это равнозначно умножению на положительное число λ обеих частей бюджетного ограничения *p1x1+p2x2≤Q*, что даёт неравенство, эквивалентное исходному. Поскольку ни цены, ни доход Q не входят в функцию полезности, задача остаётся той же, что и первоначально.

Если на каком-то потребительском наборе *(x1,x2)* бюджетное ограничение *p1x1+p2x2≤Q* будет выполняться в виде строгого неравенства, то мы можем увеличить потребление какого-либо из продуктов и тем самым увеличить функцию полезности. Следовательно, набор *(х, х)*, максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е.

 *p1х+p2х=Q*.

Графически это означает, что решение *(х, х)* задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой, которая проходит через точки пересечения с осями координат, где весь доход тратиться на один продукт: *(0, )* и *(,0)*.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (ибо решение *(х, х)* этих двух задач одно и то же):

*u(x1,x2)→max*

 при условии *p1x1+p2x2=Q.*

Для решения этой задачи применим метод Лагранжа. Выписываем функцию Лагранжа

 *L(x1,x2,* *λ)= u(x1,x2)+ λ (p1x1+p2x2-Q),*

находим её частные производные по переменным *x1,x2* и *λ*, которые приравниваем к нулю:

 *L= u+λ p1=0,*

 *L= u +λ p2 =0,*

*L=p1x1+p2x2-Q =0.*

Исключив из полученной системы неизвестную λ, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными *x1,* и *x2* :

 =,

*p1x1+p2x2=Q .*

Решение *(х, х)* этой системы есть критическая точка функции Лагранжа. Подставив решение *(х, х)* в левую часть равенства:

=,

получим, что в точке *(х, х)* отношение  предельных полезностей *u(х, х)* и *u(х, х)* продуктов равно отношению рыночных цен *p1*и *p2* на эти продукты:

=. (5.1)

В связи с тем, что отношение равно предельной норме замены первого продукта вторым в точке локального рыночного равновесия *(х, х)*, из (5.1) следует, что эта предельная норма равна отношению рыночных цен на продукты. Приведённый результат играет важную роль в экономической теории.

Геометрически решение *(х, х)* можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности *u(x1,x2)* с бюджетной прямой *p1x1+p2x2=Q.* Это определяется тем, что отношение =- показывает тангенс угла наклона линии уровня функции полезности, а отношение -  представляет тангенс угла наклона бюджетной прямой. Поскольку в точке потребительского выбора они равны, то в этой точке происходит касание данных двух линий.

**1.1.1. Пример решения задачи потребительского выбора.**

Решим задачу потребительского выбора.

***Оптимальный набор потребителя составляет 6 ед. продукта х1 и 8 ед. продукта х2. Определите цены потребляемых благ, если известно, что доход потребителя равен 240 руб. Функция полезности потребителя имеет вид: u(x1,x2)=xx.***

***Решение*.** Следуя принципу решения, получаем систему уравнений:

=,  =,  =,

*p1x1+p2x2=240. p1x1+p2x2=240 . p1x1+p2x2=240 .*

Подставив, вместо *х1 – 6 ед*., вместо *х2* – *8 ед*., получим: *p1=10*руб., *p2=22.5*руб.

* 1. **Общая модель потребительского выбора.**

Была рассмотрена модель потребительского выбора с двумя продуктами и её решение с помощью метода множителей Лагранжа. Сейчас рассмотрим свойства задачи потребительского выбора с произвольным числом продуктов и целевой функцией общего вида.

Пусть задана целевая функция предпочтения потребителя *u(x1,x2, …,хn)*, где *хi-* количество i-го продукта, вектор цен *pi=(p1,p2,…,pn)* и доход Q. Записав бюджетное ограничение и ограничение на неотрицательность, получаем задачу

*u(x)→max* (5.2)

 при условии *px≤Q, x≥0*

(здесь *x=(x1,x2, …,хn), p=*(*p1,p2,…,pn), px=(* *p1x1+…+pnxn)*).

Будем считать, что неотрицательность переменных обеспечивается свойствами целевой функции и бюджетного ограничения. В этом случае можно записать функцию Лагранжа и исследовать её на безусловный экстремум:

*L(x,* *λ)= u(x)+ λ (* *px-Q).*

 Необходимое условие экстремума – равенство нулю частных производных: *L=u+* *λpi=0* для всех *i[1;n]* и *L=px-Q=0.* Отсюда вытекает, что для всех i в точке *х* рыночного равновесия выполняется равенство:

* ,* (5.3)

которое получается после перенесения вторых слагаемых, необходимых условий в правую часть и делением i-го равенства на j-ое. Итак, в точке оптимума отношение предельных полезностей любых двух продуктов равно отношению их рыночных цен. Равенство (5.3) можно переписать и в другой форме:

** (5.4)

Это означает, что полезность, приходящаяся на единицу денежных затрат, в точке оптимума одинаковая по всем видам благ. Если бы это было не так, то, по крайней мере, одну денежную единицу можно было бы перераспределить так, чтобы выросло благосостояние (значение функции полезности) потребителя. Если для некоторых i, j существует неравенство:

*,*

то некоторое количество денег можно было бы перераспределить от i –го продукта к j-му, увеличив уровень благосостояния.

**2. Функция потребительского предпочтения Стоуна**.

 Выведем теперь функцию спроса для конкретной функции потребительского предпочтения, называемой функцией Р.Стоуна. Эта функция имеет вид:

*u(x)=→max ,* где  (5.5)

*аi* – минимально необходимое количество i-го продукта, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора.

 Для того чтобы набор *{ai}* мог быть полностью приобретен, необходимо, чтобы доход Q был больше (количества денег), требуемого для покупки этого набора. Коэффициенты степени *аi>0* характеризуют относительную «ценность» продуктов для потребителя.

Добавив к целевой функции (5.5) бюджетные ограничения:

 ≤Q,

 хi≥0,

получим задачу, называемую **моделью Стоуна**. Как было сказано на стр. 6, бюджетное ограничение должно обращаться в равенство. Составим функцию Лагранжа:

 *L(x1,x2, …,хn,* *λ)= u(x)+ λ (p1x1+…+pnxn –Q).*

Найдём частные производные функции Лагранжа и приравняем их к нулю:

 *L= a1(x1-a1) ∙(x2-a2) ∙…∙(xn-an) + λp1.*

Аналогично получаем остальные частные производные, т.е.:

*L= + λ pi=0,* где i=.

Выразив *xi,* получим:

 *xi=ai-* , (5.6)

 *L*=*-Q=0.*

Умножив каждое из равенств (5.6) на *λpi* и просуммировав их по i, имеем:

*=0* (5.7).

Поскольку в точке оптимума бюджетное ограничение выполняется как равенство, заменим  на Q, получим:

 *=0.*

 Поделив на *λ*, получим:

 *=-(Q-)*.

Откуда:

  .

 Полученное выражение подставляем в равенство (5.6):

*xi=ai+ .* (5.8)

Т.е. вначале приобретается минимально необходимое количество продукта *ai.* Затем рассчитывается сумма денег, остающаяся после этого, которая распределяется пропорционально «весам» важности *i*. Разделив количество денег на цену *pi* , получаем дополнительно приобретаемое, сверх минимума, количество i- продукта и добавляем его к *аi* . [1] **Заключение**

В работе приводится задача потребительского выбора, решение которой сводится к решению задач на условный экстремум. Также рассмотрен частный случай задачи потребительского выбора - модель Стоуна.

Мною были решены задачи на условный экстремум методом подстановки и методом множителей Лагранжа, задача потребительского выбора.

Я считаю, что знание этой темы может пригодиться не только экономистам и людям, специально занимающимся этой наукой, но и ненаучным работникам, т.к. в жизни часто приходится сталкиваться с решением подобного рода задач.

**Список использованной литературы:**

1. Замков, О.О. Математические методы в экономике: Учебник/ Под общ. ред. д.э.н., проф. А.В. Сидоровича/ О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных; МГУ им. Ломоносова.-3-е изд., перераб. – М.: Издательство «Дело и сервис», 2001
2. Красс, М.С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании: Учебник. – 3-е изд. – М.: Дело,2002
3. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н Фридман. - М.: ЮНИТИ, 2002.
4. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ,1997.
5. Малыхин, В.И. Математика в экономике: Учебное пособие.- М.:ИНФРА - Москва, 2002.
6. Симонов, А.В. Об одном приложении производной к решению экономических задач/ А.С. Симонов, Н.Г. Игнатьев// математика в школе №9, 2001
7. Сборник задач и упражнений по высшей математике: мат. программирование: Учеб. Пособие/ А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; Под. общ. ред. А.В. Кузнецова – Мн.: Выш. шк., 2002
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие/ Под. ред. В.И. Ермакова.- М.: Инфра – Москва, 2002.
9. Сборник задач по микроэкономике. К «Курсу микроэкономики» Р.М. Нуреева/ Гл. ред. д.э.н., проф. Р.М. Нуреев. – М.: Норма, 2003
10. Фихтенгольц, Г.М. основы математического анализа. Часть 1. 4-е изд. – СПб: издательство «Лань», 2002.
11. Онегов, В.А. Исследование операций. Задачи, методы, алгоритмы. – Киров: ВГПУ, 2001.

**Приложение**

***Реализация модели Стоуна в системе MathCAD***

**Общий случай:**

 Обозначим минимально необходимое количество благ за А:

1) А<I,

При заданных параметрах а, α, р и I мы определим оптимальный набор (,) и значение функции полезности в этой точке (*х1,х2,U*):

Получим оптимальное значение при потребительском наборе (4,3;8,5), что означает приобретение индивидом 4,3 единицы первого блага и 8,5 единиц второго блага (минимально необходимое количество благ равно 1 и 3 единицам). При данном соотношении достигается максимальное значение функции предпочтения Стоуна – 3,75 единиц.

Построим графическую интерпретацию модели Стоуна на основании начальных данных, вычисленного значения *U* и теоретических формул для линии безразличия и бюджетной линии:



2) А=I,

Отсюда следует, что дохода индивида достаточно только для приобретения минимально необходимого ему количества благ. Дальнейшее приобретение благ в соответствии с коэффициентом предпочтения невозможно.

3) А>I,

Из этих расчетов видно, что дохода индивида в данном случае не хватит на приобретение самого необходимого.

**Частные случаи:**

1)

При отсутствии минимального необходимого количества благ весь доход (I) используется для приобретения благ в соответствии с коэффициентом предпочтения.



2)

В данном случае доход, фактически, делится пополам, так как i=2, и спрос на каждый товар рассчитывается как частное от деления полученной суммы денег на соответствующую ему цену.

